УДК 517.948:517.52

Р. И. Михальчук, М. С. Сявавко

Континуальный аналог цепных дробей

Известны различные обобщения цепных дробей [1—4]. В данной работе сделана попытка разработать в пространствах интегрируемых функций обобщение понятия ветвящейся цепной дроби с некоторыми ее применениями. Этот аналог цепной дроби играет по отношению к функционалам такую же роль, как ветвящаяся цепная дробь по отношению к функциям многих переменных.

Определения и обозначения. Пусть $G_i = \underbrace{G \times \ldots \times G}_{i}$ — прямое произведение измеримых по Лебегу, не обязательно ограниченных множеств $G \subset E^n$, где E^n обозначает n-мерное евклидово пространство точек $\tau = (\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \tau^{(n)})$, а $L(G_i)$ — пространство измеримых на G_i функций $f(\tau^i)$, для которых функция $|f(\tau^i)|$ интегрируема в смысле Лебега на G_i. Здесь для сокращения записи $\tau^i = (\tau_1, \ldots, \tau_i)$, $i = \overline{1, \infty}$.

Определение 1. *Выражение вида*

$$b_0 + \int\limits_G \cfrac{a_1(\tau^1)\, d\tau_1}{b_1(\tau^1) + \int\limits_G \cfrac{a_2(\tau^2)\, d\tau_2}{b_2(\tau^2) + \cdots + \int\limits_G \cfrac{a_i(\tau^i)\, d\tau_i}{b_i(\tau^i) + \cdots}}}, \tag{1}$$

где $a_i(\tau^i)$, $b_i(\tau^i) \in L(G_i)$ *и* $b_0 = \mathrm{const}$, *будем называть интегральной цепной дробью.*

Для сокращенного обозначения используем такую запись:

$$b_0 + \mathop{\dot{Z}}_{i=1}^{\infty} \int\limits_G \frac{a_i(\tau^i)\, d\tau_i}{b_i(\tau^i)}.$$

Если $0 < \mathrm{mes}\, G < \infty$, то элементарными преобразованиями (1) можно привести, например, к виду

$$b_0 + \mathop{\dot{Z}}_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{mes}\, G} \int\limits_G \frac{d\tau_i}{c_i(\tau^i)}, \tag{1'}$$

где

$$c_{2i-1}(\tau^{2i-1}) = \frac{a_2(\tau^2) \ldots a_{2i-2}(\tau^{2i-2})\, b_{2i-1}(\tau^{2i-1})}{a_1(\tau^1) \ldots a_{2i-1}(\tau^{2i-1})\, \mathrm{mes}\, G},$$

$$c_{2i}(\tau^{2i}) = \frac{a_1(\tau^1) \ldots a_{2i-1}(\tau^{2i-1})\, b_{2i}(\tau^{2i})}{a_2(\tau^2) \ldots a_{2i}(\tau^{2i})}, \tag{2}$$

или к виду

$$b_0 + \mathop{\dot{Z}}_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{mes}\, G} \int\limits_G \frac{a_i(\tau^i)\, d\tau_i}{d_i(\tau^i)}, \tag{1''}$$

где $d_{2i-1}(\tau^{2i-1}) = \frac{1}{\mathrm{mes}\, G} b_{2i-1}(\tau^{2i-1})$, $d_{2i}(\tau^{2i}) = b_{2i}(\tau^{2i})$.

Доказательство. Из соотношения (5) следует, что

$$f_{2p+1} - f_{2p} = \frac{1}{(\operatorname{mes} G)^{2p+1}} \int\limits_{G_{2p+1}} \frac{d\tau_1 \ldots d\tau_{2p+1}}{Q^{(2p+1)} \prod\limits_{k=1}^{p} (Q_{2k-1}^{(2p)} \cdot Q_{2k}^{(2p)}) \prod\limits_{k=1}^{p} (Q_{2k}^{(2p+1)} \cdot Q_{2k+1}^{(2p+1)})} . \tag{9}$$

Используя рекуррентные соотношения (4) и обозначение

$$A_i^{(q)} = M_{i-1} (M_i + M_{i+2} + \ldots + M_q), \quad i = \overline{1, q}, \tag{10}$$

получаем

$$f_{2p+1} - f_{2p} > C \exp \left[- \sum_{k=1}^{p} A_{2k+1}^{(2p+1)} + A_{2k}^{(2p)} \right],$$

где

$$C = \frac{1}{\operatorname{mes} G} \int\limits_{G} \frac{d\tau_1}{c_1(\tau_1) + \frac{1}{\operatorname{mes} G} \int\limits_{G} \frac{d\tau_2}{c_2(\tau^2)}} .$$

Из условий теоремы следует, что $\sum\limits_{k=1} (A_{2k+1}^{(2p+1)} + A_{2k}^{(2p)}$ — ограниченная сверху величина, а отсюда вытекает и доказательство теоремы.

Теорема 2. *Если* $0 < \operatorname{mes} G < \infty$ *и* $m_{i+1} \leqslant c_i(\tau^i)\, c_{i+1}(\tau^{i+1})$ *для почти всех* $\tau^{i+1} \in G_{i+1}$, *причем* $\sum\limits_{i+1}^{\infty} m_{i+1} = \infty$, *то интегральная цепная дробь* (1') *с положительными компонентами сходится.*

Доказательство. Используя (9) и рекуррентные соотношения (4) оценим

$$f_{2p+1} - f_{2p} \leqslant C_1 \prod_{i=2}^{2p+1} \frac{1}{1 + m_i},$$

где $C_1 = \frac{1}{\operatorname{mes} G} \int\limits_{G} \frac{d\tau_1}{c_1(\tau_1)}$.

Возможны два случая: а) существует бесконечное количество m_i, ограниченных снизу некоторым числом $m_0 > 0$; б) $\varliminf\limits_{i \to \infty} m_i = 0$. В случае а)

$$f_{2p+1} - f_{2p} < C_1 \left(\frac{1}{1 + m_0} \right)^{2p} \underset{p \to \infty}{\to} 0.$$

В случае б) все члены последовательности $\{m_i\}$ ограничены сверху некоторым числом m. Тогда

$$\frac{1}{1 + m_i} = 1 - \frac{m_i}{1 + m_i} \leqslant 1 - \frac{m_i}{1 + m} \leqslant \exp \left(- \frac{m_i}{1 + m} \right)$$

и

$$f_{2p+1} - f_{2p} < C_1 \exp \left(- \frac{1}{1 + m} \sum_{i=2}^{2p+1} m_i \right) \underset{p \to \infty}{\to} 0.$$

Аналогично доказывается следующий достаточный признак.

Теорема 3. *Если в* G_i *все элементы* $a_i(\tau^i)$, $b_i(\tau^i)$, $i = \overline{1, \infty}$, *интегральной цепной дроби* (1) *положительны и удовлетворяют условию*

$$\int\limits_{G} \frac{a_i(\tau_i)\, d\tau_i}{b_i(\tau^i)} \leqslant 1 \ \text{и} \ b_i(\tau^i) \geqslant d > 0,$$

то цепная дробь сходится

где $\overline{f}_i$ и $\overline{\overline{f}}_i$ — соответственно подходящие дроби для (1*) и (13). Отсюда, учитывая (14), заключаем, что

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\overline{f}_{i+1} - \overline{f}_i| \leqslant |b_0| - \lim_{n\to\infty} \overline{\overline{f}}_{n+1} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\operatorname{mes} G} \int\limits_G \frac{|a_1(\tau^1)|\,d\tau_1}{|a_1^{(i)}(\tau_1)|} \leqslant 1,$$

т. е. интегральная цепная дробь (1*) сходится абсолютно. А так как

$$f_i - b_0 = \frac{1}{\operatorname{mes} G} \left| \int\limits_G \frac{a_1(\tau_1)\,d\tau_1}{\overline{Q}_1^{(i)}(\tau_1)} \right| \leqslant \frac{1}{\operatorname{mes} G} \int\limits_G \frac{|a_1(\tau_1)|\,d\tau_1}{|Q_1^{(i)}(\tau_1)|} \leqslant 1,$$

то область ее значений принадлежит кругу (12). Аналогично можно показать, что для дроби (1) при выполнении условий приведенной ниже теоремы мажорантой будет дробь (13).

Т е о р е м а 5. *Интегральная цепная дробь (1) с комплексными компонентами абсолютно сходится, и ее область значений принадлежит кругу*

$$|y - b_0| \leqslant \int\limits_G |a_1(\tau_1)|\,d\tau_1, \tag{15}$$

если для почти всех $\tau^i \in G$, $i = \overline{1, \infty}$, *справедливо неравенство*

$$|b_i(\tau^i)| \geqslant 1 + \int\limits_G |a_{i+1}(\tau^{i+1})|\,d\tau_{i+1}. \tag{16}$$

Рассмотрим интегральную цепную дробь вида

$$\frac{1}{1 + \overset{\infty}{\underset{i=1}{\mathrm{Z}}} \dfrac{1}{\operatorname{mes} G} \displaystyle\int\limits_G \dfrac{l_i(z;\tau^i)\,d\tau_i}{1}}, \tag{17}$$

где $l_i(z;\tau^i)$ — комплекснозначные смешанные функционалы, определенные в $D \times G_i$; D — область изменения функциональной переменной z.

Т е о р е м а 6. *Если для интегральной цепной дроби (17) выполняются условия*

$$\left| \int\limits_G l_i(z;\tau^i)\,d\tau_i \right| \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{4}, \quad k = \overline{1, \infty}, \tag{18}$$

то: 1) дробь (17) равномерно сходится в D; 2) значение y этой дроби и всех ее подходящих дробей содержится в области

$$\left| y - \frac{\eta^2}{\eta^2 - 4\alpha} \right| < \frac{2\alpha\eta}{\eta^2 - 4\alpha^2}, \quad \eta = 1 + \sqrt{1 - 4\alpha};$$

3) предельные константы $\alpha = 1/4$ и область $|y - 4/3| \leqslant 2/3$ являются «наилучшими», т. е. первую нельзя увеличить, а последнюю — уменьшить.

Справедливость первого утверждения следует из того, что при выполнении условий (18) непрерывная цепная дробь

$$1 + 1/\left(1 + \overset{\infty}{\underset{i=1}{\mathrm{Z}}} \frac{-\alpha}{1}\right) \tag{19}$$

является мажорантой для интегральной цепной дроби (17).

Второе и третье утверждения следуют из результатов [3].

П р и м е р 1. Исследуя вопрос о переносе тепла излучением Амбарцумян [5] и Чандрасекар [6] пришли к так называемому H-уравнению

$$H(t) = 1 + H(t) \int\limits_0^1 \frac{t\varphi(\tau)}{t + \tau} H(\tau)\,d\tau, \tag{20}$$

УДК 517.526

Ю. Р. БАТЮК, М. С. СЯВАВКО

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

(Представлено академиком АН УССР В. С. Королюком)

Пусть $L^p(S, \Sigma, \mu, X)$ — пространство всех μ-измеримых функций $f: S \to X$, где S — произвольное множество, (S, Σ, μ) — конечное положительное пространство с мерой, X — сепарабельная B-алгебра с единицей E, а $1 \leqslant p \leqslant \infty$ [1].

Кроме того, через $L^{\vec{p}_i}(S^{(i)}, \Sigma^{(i)}, \mu^{(i)}, X)$ будем обозначать пространство $\mu^{(i)}$-измеримых функций $f(s_1, \dots, s_i): S^{(i)} \to X$ таких, что

$$\|f\|_{\vec{p}_i} = \|\dots\|\|f\|_{p_1}\|_{p_2}\dots\|_{p_i} < \infty,$$

где $S^{(i)}, \Sigma^{(i)}, \mu^{(i)}$ — соответственно декартово произведение множеств S_k, Σ_k, μ_k, а вектор $\vec{p}_i = (p_1, \dots, p_i)$, $1 \leqslant p_k \leqslant \infty$, $k = \overline{1, i}$.

Определение. Формальное выражение

$$E + \int\limits_{G_1} \cfrac{a_1(s_1)\,\mu_1(ds_1)}{E + \int\limits_{G_2} \cfrac{a_2(s_1, s_2)\,\mu_2(ds_2)}{E + \dots + \int\limits_{G_i} \cfrac{a_i(s_1, \dots, s_i)\,\mu_i(ds_i)}{E + \dots}}} = E + \int\limits_{G_1}\Big[E + \int\limits_{G_2}(E + \dots)^{-1} a_2\mu_2\Big]^{-1} a_1\mu_1, \qquad (1)$$

где $a_i(s_1, \dots, s_i): S^{(i)} \to X$, G_i — μ_i-измеримые множества $(i = \overline{1, \infty})$, а интегрирование понимается в смысле Бохнера, называется интегральной цепной дробью (и. ц. д.).

В дальнейшем для сокращенного обозначения дроби (1) будем использовать запись

$$E + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{\infty} \frac{a_i(s^i)\,\mu_i(ds_i)}{E},$$

где $s^i = (s_1, s_2, \dots, s_i)$.

И. ц. д. (1) является обобщением понятия непрерывной дроби. Кроме того, она включает в себя, как частные случаи, другие виды цепных дробей, часто встречающиеся в приложениях. Укажем некоторые из них:

1) μ_i — мера Дирака, сосредоточенная в одной точке $(i = \overline{1, \infty})$. Тогда и. ц. д. (1) превращается в дробь, компоненты которой представляют собой элементы B-алгебры с единицей [2];

2) μ_i — сумма мер Дирака, $X = R$. Дробь (1) — ветвящаяся цепная дробь [3];

3) μ_i — мера Лебега, $X = R$. Дробь (1) — континуальный аналог ветвящейся цепной дроби [4].

Положим

$$Q_0^{(n)} = f_n,\ Q_i^{(n)} = E + \mathop{\mathrm{D}}_{k=i+1}^{n} \int\limits_{G_k} \frac{a_k\mu_k(ds_k)}{E},\ Q_n^{(n)} = E.$$

Легко заметить, что

$$Q_i^{(n)}(s^i) = E + \int\limits_{G_{i+1}} R_{i+1}^{(n)}(s^{i+1})\,a_{i+1}(s^{i+1})\,\mu_{i+1}(ds_{i+1}),$$

где

$$R_i^{(n)} = [Q_i^{(n)}]^{-1}.$$

Выражение (1) сходится, если: а) $[Q_i^{(n)}]^{-1}$ существует для $i=\overline{1,n}$ $(n=\overline{1,\infty})$; б) последовательность $\{f_n\}$ имеет по норме пространства X конечный предел. Значение н. ц. д. (1) тогда принимается равным этому пределу.

Для изучения характера изменения подходящей дроби рассмотрим разность между двумя подходящими дробями f_n и f_m $(m<n)$. Методом индукции устанавливается формула

$$f_n-f_m=(-1)^m\int_{G^{(m+1)}} R_1^{(n)}R_2^{(n)}\dots R_{m+1}^{(n)}a_{m+1}R_m^{(m)}a_mR_{m-1}^{(m)}a_{m-1}\dots R_1^{(m)}a_1\mu^{(m+1)}. \quad (2)$$

В дальнейшем будем считать, что $a_i\in L^{\vec{p_i}}(S^{(i)},\Sigma^{(i)},\mu^{(i)},X)$, где

$$\vec{p_i}=(\infty,\dots,\infty,1)\quad (i=\overline{1,\infty}).$$

Теорема 1. Если в дроби (1) $|a_{i+1}|_{X,\vec{p}_{i+1}}\leqslant\alpha<\frac{1}{4}$ $(i=\overline{1,\infty})$, то эта дробь сходится и

$$|f-f_m|_X\leqslant\frac{2|a_1|_{X,1}}{1+\sqrt{1-4\alpha}}\rho^m, \quad (3)$$

где

$$\rho=\frac{4\alpha}{(1+\sqrt{1-4\alpha})^2}\leqslant 1.$$

Доказательство. Оценим $|R_i^{(n)}|_X$. Пусть сначала $n=i+1$. Тогда

$$|R_i^{(i+1)}|_X=\left|\left(E+\int_{G_{i+1}}a_{i+1}\mu_{i+1}\right)^{-1}\right|_X\leqslant\frac{1}{1-|a_{i+1}|_X}\leqslant\frac{1}{1-\alpha}.$$

Аналогично, при $n=i+2$

$$|R_i^{(i+2)}|_X=\left|\left(E+\int_{G_{i+1}}\frac{a_{i+1}\mu_{i+1}}{E+\int_{G_{i+2}}\frac{a_{i+2}\mu_{i+2}}{E}}\right)^{-1}\right|_X\leqslant\frac{1}{1-\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

По методу индукции получаем, что

$$|R_i^{(n)}|_X\leqslant\frac{1}{1-\frac{\alpha}{1-\frac{\alpha}{1-\cdot_{\cdot_{\cdot}}}}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4\alpha})}=\frac{2}{1+\sqrt{1-4\alpha}}.$$

Тогда из (2)

$$|f_{m+k}-f_m|_X\leqslant\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-4\alpha}}\right)^{2m+1}\alpha^m|a_1|_{X,1}=\frac{2|a_1|_{X,1}}{1+\sqrt{1-4\alpha}}\rho^m\underset{m\to\infty}{\to}0.$$

Значит, дробь (1) сходится, а из непрерывности нормы $|f_{m+k}-f_m|_X$ при $k\to\infty$ получаем оценку (3).

Теорема 2. Пусть в н. ц. д. (1) $X=R$ и для вещественных компонент $a_i(i=\overline{1,\infty})$ верны следующие предположения:

1) почти всюду по мере $\mu^{(i)}$

$$\int_{G_{i+1}}a_{i+1}\mu_{i+1}(ds_{i+1})+\alpha\geqslant 0,$$

где

$$0\leqslant\alpha<\frac{1}{4};$$

Reviewer: 1947 P. Wynn

Dear reviewer,
full bibliographical information about the paper in question can be obtained from the reverse.
Please return the original review sheet.

Remarks:

40A15

Please classify according to the 1980 Mathematics Subject Classification (see Vol. 480/I)

40A15

30B70, 41A35

32K05, 32C30

Key words: integral continued fractions

Please type if possible / Please underline: Script blue, Greek red, Gothic green

G is a set. With $\tau_1, \ldots, \tau_i \in G$, τ^i is the set $\{\tau_1, \ldots, \tau_i\}$ and G^i is the space of τ^i $(1 \leq i < \infty)$. Integrals are in the sense of Lebesgue and over G in all cases. $\mathbb{C}$ is the complex plane. With $b_0 \in \mathbb{C}$ and $a_i, b_i : G^i \to D$ where D is a prescribed subset of points in $\mathbb{C}$

$$C_n = b_0 + \int \frac{a_1(\tau^1)d\tau_1}{b_1(\tau^1)+} \cdots \int \frac{a_n(\tau^n)d\tau_n}{b_n(\tau^n)}$$

may formally be determined by a recursive process of division, integration and addition.

The expansion $b_0 + \int G|a_i/b_i]$ of which the C_n are convergents is an integral continued fraction. (For a more general presentation and further results and references, see Batyuk Yu. R. and Syavavko M. S., Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR (1984)

Editor: please complete reference

6–8; Zbl.) In the paper under review, conditions which suffice to ensure that the convergents C_n are well defined and converge to a finite limit are given. Neither existence nor convergence is affected by the term b_0 which we omit henceforth. The special form of $\int G|a_i/b_i]$ in which $b_i(\tau^i)=1$ is denoted by $\int G|a_i/1]$ and that in which $b_i(\tau^i) = K d_i(\tau^i)$, K being constant, by $\int G|a_i/Kd_i]$. $\mu(G)$ is the measure of the set G.

The notations $[\tau^i \in G^i]$ and $(\tau^i \in G^i)$ indicate that an associated condition holds for all $\tau^i \in G^i$ and for almost all $\tau^i \in G^i$ respectively. A sum such as $\sum M_i$ denotes $\sum_{i=1}^{\infty} M_i$. (A) Let $0 < \mu(G) < \infty$ and $c_i : G^i \to \mathbb{R}$ $(1 \le i < \infty)$. If either (i) $0 < c_i(\tau^i) \le M_i$ $(\tau^i \in G^i;\ 1 \le i < \infty)$ and $\sum M_i < \infty$ or (ii) $m_{i+1} \le c_i(\tau^i) c_{i+1}(\tau^{i+1})$ $(\tau^{i+1} \in G^{i+1};\ 1 \le i < \infty)$ and $\sum m_{i+1} = \infty$, then $\int[G | c_i / 1]$ converges. (B) With $a_i, b_i : G^i \to \mathbb{R}$, let $\int \{a_{i+1}(\tau^{i+1}) / b_{i+1}(\tau^{i+1})\} d\tau_{i+1} \le 1$ and $b_i(\tau^i) \ge d > 0$ $[\tau^i \in G^i;\ 1 \le i < \infty]$. $\int[G | a_i / b_i]$ converges. (C) Let $0 < \mu(G) < \infty$. With $a_i, d_i : G^i \to \mathbb{C}$, let $|d_i(\tau^i)| \ge 1 + |a_i(\tau^i)|$ $[\tau^i \in G^i;\ 1 \le i < \infty]$. $\int[G | a_i / \mu(G) d_i]$ converges absolutely and, denoting its value or that of any of its convergents by y, $|y| \le 1$. (D) With

$a_i, b_i : G^i \to \mathbb{C}$, let $|b_i(\tau^i)| \geq 1 + \int |a_{i+1}(\tau^{i+1})| d\tau_{i+1}$ $(\tau^i \in G^i; 1 \leq i < \infty)$. $\int G[a_i / b_i]$ converges absolutely and, with y as above, $|y| \leq 1$. (E) Let the mapping $e_i(z) : G^i \to \mathbb{C}$ be defined for all $z \in D \subseteq \mathbb{C}$ and let $|\int e_i(z; \tau^i) d\tau_i| \leq \alpha \leq 1/4$ $(i = 1$ and $[\tau^{i-1} \in G^{i-1};$ $1 < i < \infty])$. $1/\{1 + \int G[e_i(z)/1]\}$ converges uniformly over D and, with y as above, $|y - \eta^2(\eta^2 - 4\alpha^2)^{-1}| \leq 2\alpha\eta(\eta^2 - 4\alpha^2)^{-1}$ where $\eta = 1 + \sqrt{(1 - 4\alpha)}$. (The constant $\alpha = 1/4$ and the region $|y - 4/3| \leq 2/3$ are natural in the sense that the former cannot be increased and the latter cannot be reduced in size.)

Reviewer: 1947 P. Wynn

Dear reviewer,

full bibliographical information about the paper in question can be obtained from the reverse.

Please return the original review sheet.

Remarks:

40A15

Please classify according to the 1980 Mathematics Subject Classification (see Vol. 480 I)

40A15

30B70, 41A35

32K05, 32C30

Key words:

integral continued fraction

separable Banach algebra

branching continued fraction

Please type if possible / Please underline: Script blue, Greek red, Gothic green

Let X be a separable Banach algebra with unit element E, let $G(i)$ be a μ_i measurable set, and let $a_i : G(1)\times\ldots\times G(i) \to X$ $(i=1,2,\ldots)$ The elements of X

$$C_n = E + \int_{G(1)} \frac{a_1(s_1)\mu_1(ds_1)}{E+} \cdots \int_{G(n)} \frac{a_n(s_1,\ldots,s_n)\mu_n(ds_n)}{E}$$

may formally be determined by a recursive process of inversion, integration and addition. The expansion of which the C_n are convergent is an integral continued fraction. In the special case in which μ_i is a Dirac measure concentrated at the point s_i, this expansion reduces to a continued fraction over a Banach algebra with unit element. If $X=R$ and μ_i is a sum of Dirac measures, it becomes a branching continued fraction (see, for example, Bodnarchuk P.I. and Skorobogatko V. Ya., Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR (1974) 272 ; Zbl. | Bodnarchuk P. I., Kalenyuk P.I. and Marko V. F., Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR (1975) 181–184; Zbl. | Bodnar D.I. Dokl. Akad Nauk SSR (1976) 40–43 and 44–47; Zbl. | Kuchminskaya Kh. I., Ukr. Math. Jour. (1978) 613–617; Zbl.). If $X=R$ and μ_i is a Lebesgue measure, it is a continuous analogue of the branching continued fraction. Two

Editor: Please complete references →

results establishing the existence of the C_n and their convergence to a limit in X are given.

Reviewer: 1947 P. Wynn

Dear reviewer,
full bibliographical information about the paper in question can be obtained from the reverse.
Please return the original review sheet.

Remarks:

Please classify according to the 1980 Mathematics Subject Classification (see Vol. 480/VI)

30B40

65B05, 40A05

Key words: Lagrange-Bürmann expansion
approximation of functions

Please type if possible / Please underline: Script blue, Greek red, Gothic green

A method for obtaining a system of approximating functions $\{s^{(n)}(z)\}$ for a function $f(z)$ which is associated with the series $\sum_{i=0} f_i z^i$ for small z and satisfies the relationship $f(z)=f(\infty)+O(z^{-1})$ for large z is described. The method proceeds in three stages as follow (A) With $e(z)=z^{-1}\{f(z)-f_0\}$ set $g(z)=\{f(z)-f(\infty)\}/e$ and obtain by algebraic methods the coefficien g_i $(1\leq i\leq n)$ in the Lagrange-Bürmann expansio $g(z)=g(0)+\sum_{i=1} g_i\left\{\frac{ze'(z)}{e(z)}\right\}^i$. (B) With $p(z)=\sum_{i=1}^{n} g_i z$

obtain, again by algebraic methods, the coefficients q_i $(1 \le i \le n)$ in the inverse function $q(z) = \sum_{i=1} q_i z^i$ for which $q\{p(z)\} = z$. (c) With $q^{(n)}(z) = \sum_{i=1}^{n} q_i z^i$, solve the differential equation $r^{(n)}(0) = f_1$,

$$z\frac{dr^{(n)}(z)}{dz} = r^{(n)}(z)\, q^{(n)}\left\{\frac{zr^{(n)}(z) - f(\infty) + f_0}{r^{(n)}(z)} - g(0)\right\}.$$

$r^{(n)}(z)$ is then an approximation to $e(z)$ and $s^{(n)}(z) = f_0 + zr^{(n)}(z)$ is one to $f(z)$. A theory of the convergence of the $s^{(n)}(z)$ to $f(z)$ is given. In very simple cases, as the author indicates, the g_i, q_i and $r^{(n)}(z)$ above are available in closed form.

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

Date: 27. JUNI 1985 | Term: 8 weeks

Reviewer: 1347 P. Wynn

Dear reviewer,
full bibliographical information about the paper in question can be obtained from the reverse.
Please return the original review sheet.

Remarks:

Please classify according to the 1980 Mathematics Subject Classification (see Vol. 480/VI)

41A20

41A05 65D05

Key words:
rational function interpolation
ε-algorithm
cross relationships
lozenge algorithms

Please type if possible / Please underline: Script blue, Greek red, Gothic green

(A) The paper is concerned with numbers $\varepsilon(i,j)$ which obey a relationship of the form (1) $\{\Delta_j \varepsilon(i,j)\}\{\Delta_i \varepsilon'(i,j)\} = w(i,j)$. ($\Delta_{hk\ldots}$ is a partial difference operator: $\Delta_{hk\ldots} f(a,\ldots,h,k,\ldots,z) = f(a,\ldots,h+1,k+1,\ldots,z) - f(a,\ldots,h,k,\ldots,z)$; in particular $\Delta_j \varepsilon(i,j) = \varepsilon(i,j+1) - \varepsilon(i,j)$). The dash denotes a skew displacement operation defined by setting $\varepsilon'(i,j) = \varepsilon(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})$)

(B) The numbers $\varepsilon(i,j)$ may be set in a composite unbounded square array $[\bar{S}] = [S] \cup [S']$, $[S]$ and $[S']$ containing the numbers $\varepsilon(i,j)$ and $\varepsilon'(i,j)$ respectively, both for $i \in I$, $j \in I(-1)$ ($I(k)$ is the sequence $k, k+1, \dots$; I is $I(0)$.) The position of $\varepsilon(i,j)$ in $[\bar{S}]$ is indicated by the row and column indices i and j respectively; over $[\bar{S}]$ the ranges of i and j are $i \in \bar{I}(-\frac{1}{2})$, $j \in I(i-[i]-1)$ ($\bar{I}(k)$ is the sequence $k, k+\frac{1}{2}, k+1, \dots$.) In $[\bar{S}]$, $[S]$ and $[S']$ contain the numbers $\varepsilon(i,j)$ at the intersections of the full rows and columns and the half rows and columns respectively. With rows and columns in $[\bar{S}]$ equispaced, relationship (1) concerns numbers lying at the corners of a square in $[\bar{S}]$ whose sides belong to diagonals in $[\bar{S}]$. Relationship (1) may, subject to suitable conditions, be applied to the boundary conditions (2) $\varepsilon(i,-1)=0$ $(i \in I)$, (3) $\varepsilon'(0,j)=0$ $(j \in I(-1))$ and the initial values (4) $\varepsilon(0,j)$ $(j \in I)$, row by row with $i \in \bar{I}$, $j \in I(i-[i]-1)$ to determine all $\varepsilon(i,j) \in [\bar{S}]$ ($\bar{I}$ is $\bar{I}(0)$.) With $x(\nu)$, $f(\nu)$ two sequences of complex numbers, $g(\nu|x)=$

$\{x - x(\nu)\}^{-1}$ $(\nu \in \underline{I})$, $m \geq 0$ a fixed integer, and $r(i,j;m|x)$ that rational function of x with denominator and numerator of degrees i and j respectively for which $r(i,j;m|x(\nu)) = f(\nu)$ $(m \leq \nu \leq m+i+j)$, relationship (1) with (5) $w(i,j) = g(m+i+j+1|x)$ may, subject to suitable conditions, be applied as described to the Lagrange polynomial initial values $\varepsilon(0,j) = r(0,j;m|x)$ $(j \in \underline{I})$ and, in particular, $\varepsilon(i,j) = r(i,j;m|x)$ for all $\varepsilon(i,j) \in [S]$ (Claessens G., Num. Math., __29__ (1978) 227–231; Zbl.). (C) The numbers $\varepsilon(i,j)$ may also be set in a composite unbounded upper triangular array $[\bar{U}] = [U] \cup [U']$, $[U]$ and $[U']$ containing the numbers $\varepsilon(i,j)$ $(i \in I, j \in I(i))$ and $\varepsilon'(0,j)$ $(j \in I)$, $\varepsilon'(i,j)$ $(i \in I(1), j \in I(i-1))$ respectively. Now, subject to suitable conditions, (1) is applied to the boundary conditions $\varepsilon'(0,j) = 0$ $(j \in \underline{I})$

ditor: lease mplete ference →

$I(i)$ and initial values (4), row by row with $i \in I$, $j \in I_i$ to determine all $\varepsilon(i,j) \in [\bar{U}]$. For example, with (6) $w(i,j) = x(i+j+1) - x(j-i)$ and $\varepsilon(0,j) = f(j)$, $\varepsilon(i,j) = \rho_{2i}^{(j-i)}$ for all $\varepsilon(i,j) \in [\bar{U}]$, the $\rho_r^{(m)}$ being Thiele's reciprocal differences. (D) Numbers $\varepsilon(i,j) \in [S']$ may be eliminated from four relationships of the form (1) to yield the relationship (7) $\Delta_j\{w(i,j)\{\Delta_j \varepsilon(i,j)\}^{-1}\} = \Delta_i\{w'(i,j)\{\Delta_i \varepsilon''(i,j)\}^{-1}\}$ holding among numbers $\varepsilon(i,j)$ disposed in the form of a cross in $[S]$ ($\varepsilon''(i,j)$ is $\{\varepsilon'(i,j)\}'$). Subject to suitable conditions $[S]$ may be constructed by applying (7) with $i \in I$, $j \in I(-1)$ to the boundary conditions (2) and $\varepsilon(-1,j) = \infty$ $(j \in I)$ and the initial values (4). Similarly (7) with $i \in I(\frac{1}{2})$, $j \in I(-\frac{1}{2})$ offers a method for the construction of $[S']$. (E) If, in the use of (7) to construct $[S]$ as just described, the boundary and initial values ε are subjected to the transformation (8) $(az+b)/(cz+d)$, where $ad-bc\neq 0$, and the $w(i,j)$ satisfy the condition (9) $\Sigma_j\, w(i,j) = \Sigma_i\, w'(i,j)$ for $i\in I$, $j\in I(-1)$ where, in particular, $\Sigma_j\, w(i,j) = w(i,j)+w(i,j+1)$, the numbers produced are (10) $(a\varepsilon(i,j)+b)/(c\varepsilon(i,j)+d)$. (This result is most easily derived by considering in isolation the transformations az, $z+b$ and, in conjunction with (9), $1/z$.) Mutatis mutandis, this result with (9) valid for $i\in I(\frac{1}{2})$, $j\in I(-\frac{1}{2})$ holds with regard to the construction of [S'] by the use of [7]. The results hold in conjunction if (9) is valid for $i\in \bar{I}$, $j\in I(i-[i]-1)$; (9) holds in this way for the $w(i,j)$ of (5,6). (We mention Thiele's more stringent invariance result: if the boundary conditions $\varepsilon'(0,j)$ are left untouched and the initial values $\varepsilon(0,j)$ are subjected to the transformation (8) then the $\varepsilon(i,j)\in[U]$ in (C) are transformed according to

(10) if and only if the $w(i,j)$ have the form (6).) (F) The theory of the numbers $\varepsilon(i,j)$ may be related to that of numbers $\sigma(i,j)$ which may be set in an array of the form $[\bar{U}]$ of (C) and satisfy relationships of the form (11) $R\{\sigma(i,j), \sigma'(i,j), \sigma'(i+1,j), \sigma(i,j+1)\} = p(j-i)/q(i+j)$ where $R(a,b,c,d) = (a-b)(c-d)/\{(a-c)(b-d)\}$ and $p(\nu), q(\nu)$ $(\nu \in I)$ are prescribed sequences in the following way. Let nine numbers $N, NW, NE, \ldots, S$ set at cardinal points as indicated satisfy the four relationships $R(NW,N,C,NE) = ne/nw$, $R(W,NW,SW,C) = sw/nw$, $R(C,NE,SE,E) = ne/se$, $R(SW,C,S,SE) = sw/se$. The numbers $NW, \ldots, SE$ may be eliminated to yield the single relationship

$$\{(nw-ne)/(C-N)\} + \{(se-sw)/(C-S)\} = \{(se-ne)/(C-E)\} + \{(nw-sw)/(C-W)\}$$

concerning C, N, S, E, W. This result may be applied to the $\sigma(i,j)$

of (11): setting $N=\sigma(i,j)$, $C=\sigma(i+1,j),\ldots,ne=p(j-i)$, $nw=q(i+j)$, $se=q(i+j+1)$, $sw=p(j-i-1)$, relationship (7) with (12) $w(i,j)=q(i+j)-p(j-i)$ is obtained: the numbers $\sigma(i,j)\in[U]$ may also be computed by applying (1) as in (C) to the initial values $\varepsilon(0,j)=\sigma(0,j)$ $(j\in I)$ with $w(i,j)$ given by (12), for then $\sigma(i,j)=\varepsilon(i,j)$ for $\varepsilon(i,j)\in[U]$ (this correspondence does not hold over $[U']$). (G) With $\mu\geq 0$ fixed and $\sigma(i,j)=$

ditor: please omplete eference →

$r([i],\mu+i+j-[j];j-i|x)$, (11) is satisfied with $p(\nu)=g(\nu|x)$, $q(\nu)=g(\mu+\nu+1|x)$ (Stoer J., Num. Math., 3 (1961) 285–305; Zbl.). Accordingly, applying (1) with (13) $w(i,j)=g(\mu+i+j+1|x)-g(j-i|x)$ to the initial values $\varepsilon(0,j)=r(0,\mu;j|x)$ $(j\in I)$ as in (C), $\varepsilon(i,j)=r(i,\mu+i;j-i|x)$ over $[U]$. (We remark that with the same $w(i,j)$, but $\varepsilon'(0,j)=\sum_{\nu=0}^{\mu-1} r(\nu,0;j+1|x)^{-1}$ and $\varepsilon(0,j)=r(\mu,0;j|x)$ $(j\in I)$, $\varepsilon(i,j)=$

$r(\mu+i, i; j-i|x)$ over $[U]$. In the paper under review the theory of (F) is given only with $p(\nu)$ and $q(\nu)$ taken from the sequence $g(\nu|x)$; the above is a more general formulation.

$j \in I\{$ Also the $w(i;j)$ satisfy (9) with $i \in \bar{I}, j(1-[i]-1)$ if and only if they have the form (12).) (H) For the sake of completeness in this review it is briefly mentioned that, subject to suitable conditions, what is perhaps the most convenient method for the determination of all interpolatory rational function values $r(i,j;m|x)$ deriving from a fixed number of argument–function value pairs makes systematic use of a further variant of the ε-algorithm involving a closed composite triangular array $[\bar{T}] = [T] \cup [T']$. $[T]$ and $[T']$ contain the numbers $\varepsilon(i,j)$ $(0 \le i \le \tau; -1 \le j \le \tau - i)$

" and $\varepsilon'(i;j)$ # $(i=0, -1 \le j \le \tau-1;\ 1 \le i \le \tau, -1 \le j \le \tau-i)$ respectively.

(1) with (14) $w(i,j)=\varrho(\tau-i-j-1|x)$ is applied for $i=0,\frac{1}{2},\ldots,\tau-\frac{1}{2}$; $j=i-[i]-1, i-[i],\ldots,\tau-i-1$ to the boundary conditions $\varepsilon(i,-1)=0$ $(0\le i\le\tau)$, $\varepsilon'(0,j)$ $(-1\le j\le\tau-1)$ and initial values $\varepsilon(0,j)=r(0,j;\tau-j|x)$ $(0\le j\le\tau)$ to construct, in particular, $\varepsilon(i,j)=r(i,j;\tau-j|x)$ $(0\le i\le\tau, 0\le j\le i-\tau)$. Furthermore, the algorithms involving formulae (1,5), (1,13) and (1,14), and others, derive from a general theory involving a composite open pyramid $[\bar{P}]\equiv[P]\cup[P']$ of numbers $\varepsilon(i,j,k)$ disposed with reference to two horizontal i- and j-axes and a vertical k-axis, spacing being equal. $[P]$ contains the numbers $\varepsilon(i,j,k)=r(i-k,j-k;k|x)$ $(k\in I; i,j\in I(k))$ and boundary values $\varepsilon(i,k-1,k)=0$ $(k\in I, i\in I(k))$. $[P']$ contains numbers $\varepsilon(i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k)$ $(k\in I; i,j\in I(k))$ with boundary values $\varepsilon(k-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k)=0$ $(k\in I, j\in I(k))$. The

entries in $[\bar{P}]$ satisfy (15) $\{\Delta_j \varepsilon(i,j,k)\}\{\Delta_i \varepsilon(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k)\} = g(i+j-k+1|x)$ for $k \in I$, $i \in \bar{I}(k)$, $j \in I(k+i-[i]-1)$ and (16) $\{\Delta_{ijk} \varepsilon(i,j,k)\}\{\Delta_k \varepsilon(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k)\} = g(k|x) - g(i+j-k+1|x)$ and (17) $\{\Delta_{ik} \varepsilon(i,j,k)\}\{\Delta_{jk} \varepsilon(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k)\} = g(k|x)$ both for $k \in I$, $i \in \bar{I}(k)$, $j \in I(k+i-[i])$. For the $\varepsilon(i,j,k)$ involved in (15–17), k, $i-j$ and $i+j-k$ respectively are constant: the numbers involved in each relationship lie in a planar section of $[\bar{P}]$. Systematic use of (15) with constant k yields the algorithm of formulae (1,5). Displaced diagonally, the array $[\bar{S}]$ associated with (1,5) lies in a horizontal plane in $[\bar{P}]$. The square constellation associated with (1) and the cross with (7) are preserved in shape in $[\bar{P}]$. Systematic use of (16) yields the algorithm of formulae (1,13). The entries in $[\bar{U}]$ lie in a vertical plane in $[\bar{P}]$; the numbers related by (1) occur at the vertices of a parallelogram in $[\bar{P}]$, and those by (7) (they lie at points with coordinates of the form $i,j,k-1; i,j,k; i,j,k+1; i-1,j-1,k-1; i+1,j+1,k+1$) in a skew cross in $[\bar{P}]$. Similar remarks may be made concerning (17), (1, 14) and the array $[\bar{T}]$, the coordinates specifying the skew cross in this case being $i, j-1, k-1; i, j, k; i, j+1, k+1; i-1, j, k-1; i+1, j, k+1$. Allowing for distortions, the arrays $[\bar{S}]$, $[\bar{U}]$ and $[\bar{T}]$ occur together as planar sections of $[\bar{P}]$. The proof of these assertions is left as an amusing little puzzle for the worker in the field.